

Задание 1

В доме девять этажей, но лифт сломался, и теперь в нём работают только две кнопки. Нажатие на первую кнопку приводит к тому, что лифт поднимается на пять этажей вверх, а при нажатии на вторую кнопку лифт спускается на три этажа вниз. Подниматься выше девятого этажа или спускаться ниже первого этажа нельзя, ходить по лестнице тоже нельзя. Как подняться с первого этажа на девятый?

Решение

Нужно подняться на 8 этажей, если выполнили x операций «подняться на 5», и y операций «спуститься на 3», то $5x - 3y = 8$. Решение можно найти подбором, например, такое: $y = 4$, $x = 4$. Можно также заметить, что выполнение операции «подняться на 5» и операции «спуститься на 3» приводит к подъёму на 2 этажа, поэтому эти операции нужно выполнить по 4 раза.

Для полного решения необходимо ещё привести пример последовательности операций. Пример.

Операция	Этаж
	1
Подняться на 5	6
Спуститься на 3	3
Подняться на 5	8
Спуститься на 3	5
Спуститься на 3	2
Подняться на 5	7
Спуститься на 3	4
Подняться на 5	9

Критерии оценивания

Правильно приведенная последовательность действий – 5 баллов.

Последовательность действий, в которой общее число операций «Подняться на 5» и «Спуститься на 3» найдено верно, но в результате неправильного порядка происходит однократный выход выше 9 этажа или ниже 1 этажа – 3 балла.

Последовательность действий, в которой общее число операций «Подняться на 5» и «Спуститься на 3» найдено верно, но число выходов выше 9 этажа или ниже 1 этажа больше одного – 2 балла.

Правильно указано число операций «Подняться на 5» и «Спуститься на 3» – 2 балла.

Задание 2

В игре «Камень, ножницы, бумага» двое игроков одновременно показывают при помощи

руки один из трёх условных символов – «камень», «ножницы» или «бумага». Игрок выигрывает, если он показал камень, а его противник – ножницы («камень тупит ножницы»), если он показал ножницы, а его противник – бумагу («ножницы режут бумагу»), если он показал бумагу, а его противник – камень («бумага накрывает камень»). Если два игрока показали одинаковые символы, то игра заканчивается вничью.

Алёша и Боря сыграли в эту игру девять раз. Алёша два раза показал камень, три раза – ножницы, четыре раза – бумагу. Боря три раза показал камень, четыре раза – ножницы, два раза – бумагу, но порядок, в котором они показывали эти символы, неизвестен. Определите, какое наибольшее число раз мог выиграть Алёша. А какое наибольшее число раз мог выиграть Боря? Объясните свой ответ.

Решение

Составим таблицу, сколько раз каждый из мальчиков показывал каждый символ:

	Алёша	Боря
Камень	2	3
Ножницы	3	4
Бумага	4	2

Боря мог выиграть все 9 раз, если 3 раза Боря показал камень, Алёша – ножницы, 4 раза Боря показал ножницы, Алёша – бумагу, 2 раза Боря показал бумагу, Алёша – камень.

Посчитаем, сколько раз Алёша мог выиграть у Бори. Такое могло произойти в следующих случаях:

- 1) Алёша показывает камень, Боря – ножницы. Это могло произойти не более 2 раз.
- 2) Алёша показывает ножницы, Боря – бумагу. Это могло произойти не более 2 раз.
- 3) Алёша показывает бумагу, Боря – камень. Это могло произойти не более 7 раз.

Таким образом, Алёша мог выиграть не более 7 раз. Необходимо также привести пример, когда Алёша выиграл у Бори 7 раз.

- 1) Алёша показывает камень, Боря показывает ножницы – 2 раза.
- 2) Алёша показывает ножницы, Боря показывает бумагу – 2 раза.
- 3) Алёша показывает бумагу, Боря показывает камень – 3 раза.
- 4) Алёша показывает бумагу, Боря показывает ножницы – 1 раз.
- 5) Алёша показывает ножницы, Боря показывает ножницы – 1 раз.

Алёша выигрывает в случаях 1-3, то есть 7 раз.

Критерии оценивания

Оценка складывается из двух оценок – ответ на вопрос о том, сколько раз мог выиграть Алёша (максимум 3 балла) и сколько раз мог выиграть Боря (максимум 2 балла).

Правильно указано, что Алёша мог выиграть 7 раз, показано, что Алёша не мог выиграть более 7 раз, приведён пример, когда Алёша выигрывает 7 раз – 3 балла.

Отсутствует объяснение, почему Алёша не может выиграть более 7 раз, или отсутствует пример, когда Алёша выигрывает 7 раз – 2 балла.

Дан только ответ, что Алёша может выиграть не более 7 раз – 1 балл.

Правильно указано, что Боря может выиграть 9 раз, приведён пример – 2 балла.

Только ответ, что Боря может выиграть 9 раз без примера – 1 балл.

Задание 3

Три вора – Камнев, Ножницын и Бумагин хотят переправиться через реку. У каждого вора два больших баула. В лодке три места, одно место занимает один человек или один баул. Грести умеет только Камнев. При этом если Камнев останется в лодке или на берегу с баулом Ножницына и Ножницына не будет рядом, то Камнев обчистит баул Ножницына. Аналогично Ножницын обчистит баул Бумагина в его отсутствие, а Бумагин обчистит баул Каменева в его отсутствие. Как им переправиться на другой берег? Опишите алгоритм их действий.

Решение

Возможный алгоритм действий.

- 1) Камнев перевозит свои два баула и возвращается назад.
- 2) Камнев перевозит Ножницына с баулом Ножницына, возвращается с Ножницыном.
- 3) Камнев перевозит Ножницына с баулом Ножницына, возвращается один назад.
- 4) Камнев перевозит Бумагина с баулом Бумагина, оставляет их на другом берегу, возвращается один назад.
- 5) Камнев перевозит баул Бумагина.

Критерии оценивания

Приведён верный алгоритм – 5 баллов.

Алгоритм с одной ошибкой (например, однажды возникает ситуация, когда один вор может обчистить баул другого вора, или один баул остаётся непереверённым) – 2 балла.

Алгоритм с двумя ошибками – 1 балл.

Задание 4

Есть чашечные весы без делений. Для взвешивания груза также можно использовать гирьки, массы которых – целое число граммов. Вам необходимо предложить набор гирек, при помощи которого можно отмерить на весах любую массу, равную целому числу граммов от 1 до 10, при этом число гирек в наборе должно быть как можно меньше. Гирьки можно класть на каждую чашку весов, чашки весов должны находиться в равновесии, при этом на одной из чашек весов должен находиться взвешиваемый груз. Массы гирек в наборе могут повторяться. Объясните, как любую массу от 1 до 10 граммов можно взвесить при помощи предложенного набора.

Решение

В оптимальном наборе гирек для уравнивания любых масс необходимо использовать гирьки, массы которых являются степенями тройки: 1, 3, 9, 27 и т. д. Это связано с тем, что любое число можно представить в уравновешенной троичной системе счисления, при этом цифра 1 будет соответствовать тому, что гирька данной массы кладётся на одну чашку весов, цифра –1 будет соответствовать гирьке на другой чашке весов, а 0 означает, что данная гирька не используется.

Приведем пример уравнивания всех масс от 1 до 10 при помощи гирек массами 1, 3, 9.

$$1 = 1.$$

$$2 = 3 - 1,$$

$$3 = 3,$$

$$4 = 3 + 1,$$

$$5 = 9 - 3 - 1,$$

$$6 = 9 - 3,$$

$$7 = 9 - 3 + 1,$$

$$8 = 9 - 1,$$

$$9 = 9,$$

$$10 = 9 + 1.$$

От учащегося требуется привести пример конструкции из трёх гирек (их массы могут отличаться от примера 1, 3, 9) и показать, что любую массу можно уравновесить при помощи данного набора гирек.

Критерии оценивания

Приведён пример набора из трёх гирек, объяснено, как уравновесить каждую массу от 1 до 10 при помощи данного набора гирек – 5 баллов.

Только приведён пример правильного набора, без обоснования – 3 балла.

Приведён пример набора из трёх гирек, при этом одна какая-то масса от 1 до 10 не может быть уравновешена при помощи этого набора – 1 балл.

Приведён пример набора из четырёх гирек (например, 1, 2, 4, 8), показано, как уравновесить каждую массу от 1 до 10 при помощи данного набора – 3 балла.

Только приведён пример набора из четырёх гирек, удовлетворяющий условию задачи, без обоснования, почему каждую массу от 1 до 10 можно уравновесить при помощи гирек из данного набора – 1 балл.

Задание 5

Вам нужно умножить некоторое большое число X на 15. У вас есть калькулятор, но на калькуляторе сломались все кнопки операций, кроме сложения. Поэтому вы можете только складывать разные числа (например, можно сложить число X и число X , тогда получится $2X$, затем можно сложить число $2X$ и $2X$ и получится $4X$, а можно сложить $2X$ и X и получится $3X$, то есть можно складывать любые ранее полученные числа между собой). Определите, при помощи какого минимального числа сложений можно получить число $15X$. Приведите последовательность операций, при помощи которых можно получить число $15X$ за указанное число сложений.

Решение

Задачу можно решить за пять операций. Например:

1) $2X = X + X.$

2) $3X = 2X + X.$

3) $6X = 3X + 3X.$

4) $12X = 6X + 6X.$

5) $15X = 12X + 3X.$

Критерии оценивания

Верный алгоритм с использованием 5 операций – 5 баллов.

Верный алгоритм с использованием 6 операций – 3 балла.

Верный алгоритм с использованием 7 операций – 1 балл.

Неверный алгоритм или число операций больше 7 – 0 баллов.